多次元マルコフ連鎖のモデル

目 次

1 はじめに

連続時間マルコフ連鎖 (CTMC) を $\{X(t)\}$ とし，その状態空間を S とする．ここでも S の要素数は可算である場合を扱うが，その範囲内で S が多次元の構造を持った 2 つのモデルについてみていく．一方のモデルは準出生死滅過程と呼ばれる CTMC であり，その状態空間は $S = \mathcal{Z}_+ \times S_0$ (S_0 の要素数は有限) という構造を持つ．もう一方のモデルはジャクソンネットワークと呼ばれる待ち行列ネットワークのモデルであり，これも CTMC として定式化され，その状態空間は $S = \mathcal{Z}_+^N$ (N は有限) という構造を持つ．

2 準出生死滅過程に関連して

2.1 連続時間マルコフ連鎖の定常分布の行列表現

ここでは CTMC の定常分布の行列表現を与える．

定義 2.1 （部分状態空間への初到達時間） 状態の部分集合 $U \subset S$ への初到達時間を

$$T_U = \inf\{t \geq 0 \,:\, X(t) \in U\} \tag{2.1}$$

で与える．

- 基本的に，T_U は $X(0) \notin U$ の場合のみに用いる．よって，正の滞在時間を持つ CTMC では，T_U は確率 1 で正の値を取る．
- 資料 1 の定義 3.15 (p. 28) で与えた再帰時間 R_i を以下では T_i と記述する．これは，$X_0 = i$ から開始して，一旦状態 i から他の状態に移り，再び状態 i を訪れるまでの時間であった．よって，T_U とは定義が異なるので注意すること．

補題 2.1 （不変測度の行列表現）

状態空間を S とし，正の滞在時間を持ち，正則であり，既約で再帰的な CTMC を $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ とし，その推移測度行列を $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$ とする．まず，資料 1 の補題 3.8 (p. 29) で与えた不変測度を $\boldsymbol{\nu}=(\nu_i)$ とする．すなわち，ν_i を状態 0 から出発して状態 0 に戻る前に，状態 i に滞在した時間の期待値とし，次で与える．

$$\nu_i = \mathrm{E}\left[\int_0^\infty 1_{\{X(t)=i\}}1_{\{t\leq T_0\}}\,dt\,\middle|\,X(0)=0\right]$$

ここで，T_0 は状態 0 への再帰時間である．

次に，状態 0 を含む状態の部分集合を $U\subset S$ $(0\in U)$ とし，それへの初到達時間を T_U とする．状態 $i\notin U$ に対して，状態 i から出発して U に入るまでに状態 $j\notin U$ に滞在した時間の期待値を ${}_U\mu_{ij}$ とし，次で与える．

$${}_U\mu_{ij} = \mathrm{E}\left[\int_0^\infty 1_{\{X(t)=j\}}1_{\{t\leq T_U\}}dt\,\middle|\,X(0)=i\right] \tag{2.2}$$

このとき，$\boldsymbol{\nu}$ は任意の $j\notin U$ に対して次を満たす．

$$\nu_j = \sum_{i\in U}\nu_i\sum_{k\notin U}q_{ik}\,{}_U\mu_{kj} \tag{2.3}$$

また，$D\subset U^C$ として，$\boldsymbol{\nu}_D=(\nu_i,\,i\in D)$, $\boldsymbol{Q}_{UU^C}=(q_{ij},\,i\in U,\,j\in U^C)$, ${}_U\boldsymbol{M}_{U^CD}=({}_U\mu_{kj},\,k\in U^C,\,j\in D)$ とすると，これは次のように行列表現される．

$$\boldsymbol{\nu}_D=\boldsymbol{\nu}_U\,\boldsymbol{Q}_{UU^C}\,{}_U\boldsymbol{M}_{U^CD} \tag{2.4}$$

（証明） 状態 0 には，初めの時点でのみ滞在しているので，$\nu_0=\frac{1}{q_0}$ である．また，$\tilde{T}_0$ を状態 0 での滞在時間として，${}_0p_{0i}(t)$ を

$${}_0p_{0i}(t)=\mathrm{E}[1_{\{X(t)=i\}}1_{\{t\leq T_0\}}\,|\,X(0)=0]=P(X(t)=i,\ X(s)\neq 0,\,\tilde{T}_0<s<t\,|\,X(0)=0) \tag{2.5}$$

で定義すると，$\nu_i=\int_0^\infty {}_0p_{0i}(t)dt$ の関係を満たす．

次に，状態 $i\notin U$ から出発して，状態集合 U に入るまでの時点 $t\leq T_U$ で状態 $j\notin U$ にいる確率を次で与える．

$${}_Up_{ij}(t)=\mathrm{E}[1_{\{X(t)=j\}}1_{\{t\leq T_U\}}\,|\,X(0)=i]=P(X(t)=j,\ X(s)\notin U,\,0<s<t\,|\,X(t)=i) \tag{2.6}$$

式 (2.2) より，

$${}_U\mu_{ij}=\int_0^\infty {}_Up_{ij}(t)dt$$

である．

以上の準備の下，時間区間 $(0,t]$ において最後に状態空間 U にいた時点とその時の状態についての場合分けをすることで，${}_0p_{0j}(t)$ について次の表現を得る．

$${}_0p_{0j}(t)=\int_0^t\left(e^{-q_0u}q_0\sum_{k\notin U}\frac{q_{0k}}{q_0}\,{}_Up_{kj}(t-u)+\sum_{i\in U,\,i\neq 0}{}_0p_{0i}(u)q_i\sum_{k\notin U}\frac{q_{ik}}{q_i}\,{}_Up_{kj}(t-u)\right)du \tag{2.7}$$

この式の右辺積分中の第 1 項は，時点 u で状態 0 から直接 U の外に出て，U には一度も入らずに時点 t で状態 j にいる確率である．第 2 項は，時点 u で状態 0 以外の U 内の状態 $i\in U$ にいて，それ以後は U には一度も入らずに時点 t で状態 j にいる確率である．この式の両辺を t について積分することで次を得る．

$$\nu_j=\frac{1}{q_0}\sum_{k\notin U}q_{0k}\,{}_U\mu_{kj}+\sum_{i\in U,\,i\neq 0}\nu_i\sum_{k\notin U}q_{ik}\,{}_U\mu_{kj}$$

$\nu_0=\frac{1}{q_0}$ であるので，補題が得られる．□

- $\boldsymbol{\nu}$ の定義において，状態 0 は他の任意の状態でよい．
- ${}_U\boldsymbol{R}_{UD}=\boldsymbol{Q}_{UU^C}\,{}_U\boldsymbol{M}_{U^CD}$ と置けば，この補題より次の行列表現が得られる．

$$\boldsymbol{\nu}_D=\boldsymbol{\nu}_U\,{}_U\boldsymbol{R}_{UD} \tag{2.8}$$

定理 2.1 （定常分布の行列表現）

状態空間を S とし，正の滞在時間を持ち，正則であり，既約で正再帰的な CTMC を $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ とし，その推移速度行列を $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$，定常分布を $\boldsymbol{\pi}=(\pi_i)$ とする．部分空間を $U\subset S$ とし，${}_U\mu_{ij}$ は補題 2.1 で与えたものと同様とする．このとき，$j\notin U$ に対して次が成り立つ．

$$\pi_j=\sum_{i\in U}\pi_i\sum_{k\notin U}q_{ik}\,{}_U\mu_{kj} \tag{2.9}$$

また，$D\subset U^C$ として，行列表現は次の様になる．

$$\boldsymbol{\pi}_D=\boldsymbol{\pi}_U\,\boldsymbol{Q}_{UU^C}\,{}_U\boldsymbol{M}_{U^CD}=\boldsymbol{\pi}_U\,{}_U\boldsymbol{R}_{UD} \tag{2.10}$$

(証明) 正再帰的であることより， $\sum_{i \in S} \nu_i = \mathrm{E}[T_0 \,|\, X(0) = 0] < \infty$ となる．よって， 補題 2.1 の式 (2.3) の両辺をこの値で割れば定理が得られる． □

2.2 準出生死滅過程とその定常分布

2.2.1 出生死滅過程

資料 1 の定義 3.10 (p. 23) で与えたように，**出生死滅過程 (birth-and-death process; BD 過程)** とは状態空間を $S = \mathcal{Z}_+$ とし，次の 3 重対角行列 $\boldsymbol{Q}$ を推移速度行列として持つ CTMC $\{L(t)\}$ である．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \ddots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

ここではパラメーターが空間的に等質 (space-homogeneous) な場合，すなわち，

$$\lambda_i = \lambda,\, i = 0, 1, ...,\ \mu_i = \mu,\, i = 1, 2, ...$$

の場合を考える．M/M/1 待ち行列の系内客数がこのような BD 過程になることを資料 1 の例 3.2 (p. 28) で示した．この BD 過程の定常分布 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$ は $\rho = \lambda/\mu < 1$ を定常分布が存在する条件として，平衡方程式 $\boldsymbol{\pi Q} = \boldsymbol{0}^\top$ と正規化条件 $\boldsymbol{\pi e} = 1$ より，幾何分布

$$\pi_i = (1-\rho)\rho^i,\, i = 0, 1, ...$$

で与えられた．

CTMC の隠れマルコフ連鎖表現によれば，BD 過程において各状態に滞在する時間はパラメータ λ あるいは $\lambda + \mu$ の指数分布に従う．これを，マルコフ性という性質を残しながらもっと一般の分布に拡張したのが準出生死滅過程 (のひとつの解釈) である．

2.2.2 吸収的マルコフ連鎖と相型分布

有限マルコフ連鎖 (状態空間 S, $|S| < \infty$，推移確率行列 $\boldsymbol{P}(t) = (p_{ij}(t))$) は，正の滞在時間を持ち，正則であり，その推移測度行列 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ は安定的で保存的であり，後向き前向き両方のコルモゴロフの微分方程式を満たし，$\boldsymbol{P}(t)$ は $\boldsymbol{P}(t) = \exp(\boldsymbol{Q}t)$ で与えられた．ここでは吸収状態を持つ有限マルコフ連鎖において，状態が吸収状態に吸収されるまでの時間によって表される分布について考える．

(1) 吸収的マルコフ連鎖

$q_i = 0$ である状態を**吸収状態 (absorbing state)** という．$A \subset S$ を吸収状態の集合として，状態を適当に並べ替えることにより，推移速度行列が次のようになったとする．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} \\ T \\ A \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & A \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.11}$$

ここで T は一時的状態の集合である．このとき，次が成り立つ．

補題 2.2 (吸収的マルコフ連鎖の性質)

吸収的マルコフ連鎖の推移速度行列 $\boldsymbol{Q}$ が式 (2.11) で与えられているとする．このとき，推移確率行列は次で与えられる．

$$\boldsymbol{P}(t) = \exp(\boldsymbol{Q}t) = \begin{pmatrix} \exp(\boldsymbol{U}t) & (-\boldsymbol{U})^{-1}\left(I - \exp(\boldsymbol{U}t)\right)\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

この式より，一時的状態 $i \in T$ から出発して吸収状態 $j \in A$ に吸収される確率 (吸収確率) を a_{ij} として，確率行列 $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{a}_{ij})$ は次で与えられる．

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \lim_{t\to\infty} (-\boldsymbol{U})^{-1}(I - \exp(\boldsymbol{U}t))\boldsymbol{R} = (-\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{R} \tag{2.13}$$

また，一時的状態 $i \in T$ から出発して吸収状態に吸収されるまでに一時的状態 $k \in T$ に滞在した時間の期待値を μ_{ik} とすると，$\boldsymbol{M} = (\mu_{ik})$ は次で与えられる．

$$\boldsymbol{M} = \int_0^\infty \exp(\boldsymbol{U}t)dt = (-\boldsymbol{U})^{-1} \tag{2.14}$$

(証明)

$$\boldsymbol{P}(t) = \exp(\boldsymbol{Q}t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\boldsymbol{Q}^n = \boldsymbol{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^n & \boldsymbol{U}^{n-1}\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

より $\boldsymbol{P}(t)$ が得られる．$\tilde{\boldsymbol{A}}$ は，$\lim_{t\to\infty} \exp(\boldsymbol{U}t) = \boldsymbol{O}$ より得られる．また，

$$\mu_{ik} = \mathrm{E}\Big[\int_0^{\infty} 1_{\{X(t)=k\}}dt \;\Big|\; X(0)=i\Big] = \int_0^{\infty} \mathrm{E}[1_{\{X(t)=k\}} \,|\, X(0)=i]dt = \int_0^{\infty} p_{ik}(t)dt$$

の行列表現を考えることで $\boldsymbol{M}$ が得られる． □

- この補題より，$(-\boldsymbol{U})^{-1}$ が非負行列であることが分かる．

(2) 相型分布

定義 2.2 （相型分布） 吸収的な有限マルコフ連鎖における吸収時間 (一時的状態から出発してどれかの吸収状態に吸収されるまでの時間) の分布を**相型分布 (phase type distribution)** という．また，マルコフ連鎖の各状態を**相 (phase)** という．

- 相型分布は，初期確率ベクトル $\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)$ と一時的状態間の推移速度行列 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ の組として $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\beta})$ のように表現される．以下では $\boldsymbol{B}$ を相型分布の**劣生成作用素 (subgenerator)** と呼ぶことにする．
- 正の値のみをとる確率分布のクラスの中で，相型分布のクラスは稠密である．しがたって，任意の正の値のみをとる確率分布を，任意の精度で近似することができる．
- システムの挙動を表現するための時間の分布として相型分布を用いると，システム全体を CTMC でモデル化することが可能となる．相型分布に従う確率変数の和の分布など，相型分布間の演算については補足 2.4.2 を参照のこと．

補題 2.2 より，相型分布について次が得られる．

補題 2.3 （相型分布の分布関数など）
X を相型分布 $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\beta})$ に従う確率変数とし，$\boldsymbol{b} = (-\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}$ とする．このとき，次が成り立つ．

分布関数: $F(x) = P(X \le x) = 1 - \boldsymbol{\beta}\exp(\boldsymbol{B}\,x)\boldsymbol{e}$ (2.15)

分布密度関数: $f(x) = F'(x) = \boldsymbol{\beta}\exp(\boldsymbol{B}\,x)\boldsymbol{b}$ (2.16)

ラプラス・スティルチェス変換: $\tilde{F}(s) = \mathrm{E}[e^{-sX}] = \boldsymbol{\beta}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}$ (2.17)

期待値: $h_1 = \mathrm{E}[X] = \boldsymbol{\beta}(-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{e}$ (2.18)

m 次モーメント: $h_m = \mathrm{E}[X^m] = m!\,\boldsymbol{\beta}(-\boldsymbol{B})^{-m}\boldsymbol{e}$ (2.19)

例 2.1 （アーラン分布と超指数分布[1]）
p_i を $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ であるような正の重み，μ, μ_i, $i = 1, 2, \ldots k$, を適当な正のパラメータとする．k 次のアーラン分布は

$$\boldsymbol{\beta} = (1, 0, ..., 0)^T, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & & & \\ & -\mu & \mu & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\mu & \mu \\ & & & & -\mu \end{pmatrix}$$

の相型分布，k 次の超指数分布は

$$\boldsymbol{\beta} = (p_1, p_2, ..., p_k)^T, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -\mu_1 & & & \\ & -\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\mu_k \end{pmatrix}$$

の相型分布とみることができる．ただし，$\boldsymbol{B}$ のゼロ要素は省略して記述した．

[1] k 次のアーラン分布，k 次の超指数分布の密度関数は，次のように与えられる．

$$(\text{アーラン分布}) \quad f(t) = \frac{\mu(\mu t)^{(k-1)}}{(k-1)!}e^{-\mu t},\ t > 0, \qquad (\text{超指数分布}) \quad f(t) = \sum_{i=1}^{k} p_i\mu_i e^{-\mu_i},\ t > 0$$

ここで p_i は $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ であるような重み，μ, μ_i, $i = 1, 2, \ldots k$, は適当な正のパラメータである．

2.2.3　準出生死滅過程

準出生死滅過程 (**quasi-birth-and-death process; QBD 過程**) とは，状態空間を $S = (\{0\} \times \mathcal{J}_B) \cup (\mathcal{N}_+ \times \mathcal{J}_A)$, $\mathcal{J}_A = \{1, 2, ..., s_A\}$, $\mathcal{J}_B = \{1, 2, ..., s_B\}$, とする 2 次元の CTMC $\{Y(t)\} = \{(L(t), J(t))\}$ のことであり，推移速度行列 $\boldsymbol{Q}$ が次の**ブロック 3 重対角行列** (**block tri-diagonal matrix**) で与えられるものを指す．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_0 & & & \\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

$L(t) \in \mathcal{Z}_+$ を**レベル** (**level**)，$J(t)$ を**相** (**phase**) という．$\boldsymbol{B}_0$ は $s_B \times s_A$ 行列，$\boldsymbol{B}_1$ は $s_B \times s_B$ 行列，$\boldsymbol{B}_2$ は $s_A \times s_B$ 行列，$\boldsymbol{A}_j$, $j = 0, 1, 2$, は $s_A \times s_A$ 行列である．以下では，レベル ℓ に含まれる状態の集合を，$\mathcal{L}_\ell = \{(\ell, j) \,|\, j \in \mathcal{J}_A\}$, $\ell \geq 1$, $\mathcal{L}_0 = \{(0, j) \,|\, j \in \mathcal{J}_B\}$, で表し，それもレベル ℓ と呼ぶことにする．

QBD 過程は次の意味で BD 過程を拡張したものになっている．まず，BD 過程の状態は QBD 過程のレベルに対応する．BD 過程では各状態に指数分布に従う時間だけ滞在したが，QBD 過程では劣作用素 $\boldsymbol{A}_1$ (レベル 0 の場合は $\boldsymbol{B}_0$) の相型分布に従う時間だけ滞在した後，隣接するレベルへ移る．ただし，各レベルでの滞在時間を表す相型分布の初期確率 (初期状態) は次を推移確率行列とする離散時間マルコフ連鎖 (DTMC, レベル間の推移を表す) によって支配される．

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \tilde{\boldsymbol{B}}_0 & & & \\ \tilde{\boldsymbol{B}}_2 & \boldsymbol{O} & \tilde{\boldsymbol{A}}_0 & & \\ & \tilde{\boldsymbol{A}}_2 & \boldsymbol{O} & \tilde{\boldsymbol{A}}_0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

ただし，$\tilde{\boldsymbol{B}}_0 = (-\boldsymbol{B}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_0$, $\tilde{\boldsymbol{B}}_2 = (-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_2$, $\tilde{\boldsymbol{A}}_0 = (-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{A}_0$, $\tilde{\boldsymbol{A}}_2 = (-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{A}_2$ であり，これらは隣接するレベルの状態を吸収状態としてそこに吸収される吸収確率 (式 (2.13) 参照) となっている．

2.2.4　定常分布の行列幾何形式解

レベル ℓ の定常確率ベクトルを $\boldsymbol{\pi}_\ell$ とし，定常分布を $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0 \quad \boldsymbol{\pi}_1 \quad \cdots)$ とする．定理 2.1 より次が得られる．

- 部分空間 $U \subset S$ と $D \subset U^C$ に対して，その部分空間内の状態を取る定常確率のベクトルを $\boldsymbol{\pi}_U$, $\boldsymbol{\pi}_D$ とすると，定理 2.1 では，

  $$\boldsymbol{\pi}_D = \boldsymbol{\pi}_U \, \boldsymbol{Q}_{UU^C} \, {}_U\boldsymbol{M}_{U^C D} = \boldsymbol{\pi}_U \, {}_U\boldsymbol{R}_{UD}$$

  の関係が成り立つことを示した[2]．ここで，$\boldsymbol{Q}_{UU^C}$ は U から U^C への推移速度部分行列，${}_U\boldsymbol{M}_{U^C D}$ は U^C から出発して U に到達するまでに D の各状態に滞在した時間の期待値を要素に持つ行列であった．

- この結果を QBD 過程に適用すると次のようになる．

  (A) $\ell \geq 1$ を任意に固定し，$U = \mathcal{L}_{\ell-1}$, $D = \mathcal{L}_\ell$ とする．推移速度部分行列 $\boldsymbol{Q}_{\mathcal{L}_{\ell-1}\mathcal{L}_{\ell-1}^C}$ の要素の内で非ゼロであるのは $\mathcal{L}_{\ell-2}$ または $\mathcal{L}_\ell$ に推移する部分のみである ($\ell = 1$ の場合は，$\mathcal{L}_{\ell-2}$ は考えない)．しかし，前者へ推移すると，$\mathcal{L}_{\ell-1}$ を通過しない限り $\mathcal{L}_\ell$ には到達できないので，対応する ${}_{\mathcal{L}_{\ell-1}}\boldsymbol{M}_{\mathcal{L}_{\ell-1}^C\mathcal{L}_\ell}$ の要素はゼロとなる．よって，$\boldsymbol{Q}_{\mathcal{L}_{\ell-1}\mathcal{L}_{\ell-1}^C} \, {}_{\mathcal{L}_{\ell-1}}\boldsymbol{M}_{\mathcal{L}_{\ell-1}^C\mathcal{L}_\ell}$ の内で非ゼロとなる可能性があるのは次の部分だけである．

  $$\boldsymbol{Q}_{\mathcal{L}_{\ell-1}\mathcal{L}_\ell} \, {}_{\mathcal{L}_{\ell-1}}\boldsymbol{M}_{\mathcal{L}_\ell\mathcal{L}_\ell}$$

  (B) QBD 過程の推移速度行列より，$\boldsymbol{Q}_{\mathcal{L}_{\ell-1}\mathcal{L}_\ell} = \boldsymbol{A}_0$ であり，これはレベル ℓ に依存しない．また，${}_{\mathcal{L}_{\ell-1}}\boldsymbol{M}_{\mathcal{L}_\ell\mathcal{L}_\ell}$ の値を決定する推移速度行列の部分はレベル ℓ 以上の部分のみであり，この部分も ℓ に依存せず同じブロック構造をしている (推移速度行列の空間的な等質性)．よって，${}_{\mathcal{L}_{\ell-1}}\boldsymbol{M}_{\mathcal{L}_\ell\mathcal{L}_\ell}$ も ℓ には依存しないので，${}_{\mathcal{L}_{\ell-1}}\boldsymbol{M}_{\mathcal{L}_\ell\mathcal{L}_\ell} = \boldsymbol{M}$ とおくことにする．

  (C) 定理 2.1 より，QBD 過程に対して次が得られる ($\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{M}$ とした)．

  $$\boldsymbol{\pi}_\ell = \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_\ell} = \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_{\ell-1}}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_{\ell-1}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\pi}_{\ell-1}\boldsymbol{R}, \ \ell \geq 2$$

  また，同様にして

  $$\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_0} = \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_0}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\pi}_0\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{M}$$

  となる．

[2] ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_i)$, 要素の番号の集合 A に対して，$\boldsymbol{a}_A = (a_i, \, i \in A)$ とする．

以上をまとめて,

$$\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{M},\ \boldsymbol{\pi}_\ell = \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{R}^{\ell-1},\ \ell \geq 2 \tag{2.22}$$

となる[3]．その形からこれを定常分布の**行列幾何形式解** (matrix-geometric solution) と呼び，$\boldsymbol{R}$ を**公比行列** (rate matrix) という．$\boldsymbol{\pi}_0$ は平衡方程式と正規化条件より，次を満たす非負ベクトルとして与えられる．

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\pi}_0 \left\{\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{M} \boldsymbol{B}_2\right\} = \boldsymbol{0}^\top \\ &\boldsymbol{\pi}_0 \left\{\boldsymbol{e}' + \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{M} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1} \boldsymbol{e}\right\} = 1 \end{aligned} \tag{2.23}$$

公比行列 R の計算方法

$\boldsymbol{R}$ は次の漸化式で与えられる数列の極限と一致することが分かっている．

補題 2.4 (公比行列 R)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{O}, \\ &\boldsymbol{X}_n = (\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{X}_{n-1}^2 \boldsymbol{A}_2)(-\boldsymbol{A}_1)^{-1}, \\ &\boldsymbol{R} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{X}_n \end{aligned} \tag{2.24}$$

- 補題 2.2 より，$(-\boldsymbol{A}_1)^{-1} \geq \boldsymbol{O}$ であるので，数学的帰納法を用いることで，任意の n に対して $\boldsymbol{X}_n \geq 0$ であることがわかる．また，$\boldsymbol{X}_1 \geq \boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{O}$ と，任意の $n \geq 2$ に対して，

  $$\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{X}_{n-1} = (\boldsymbol{X}_{n-1}^2 - \boldsymbol{X}_{n-2}^2)\boldsymbol{A}_2(-\boldsymbol{A}_1)^{-1}$$

  であることから，$\boldsymbol{X}_n$ は n に対して要素毎に単調非減少であることが分かる．これより，$\boldsymbol{X}_n$ は $n \to \infty$ のときある行列 $\boldsymbol{R}$ に収束することが分かる．
- また，公比行列 $\boldsymbol{R}$ は，次の行列方程式の非負最小解である．

  $$\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{X}^2 \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O} \tag{2.25}$$

  これは，$\boldsymbol{X}_n \geq 0$ より $\boldsymbol{R}$ が非負であることが得られ，$\boldsymbol{R}'$ を任意の非負解とし，帰納法を用いて任意の n に対して $\boldsymbol{R}' \geq \boldsymbol{X}_n$ であることから $\boldsymbol{R}$ の最小性が得られる．
- 同様にして，$\boldsymbol{M}$ は次の漸化式で与えられる数列の極限に一致する．

  $$\begin{aligned} &\boldsymbol{Y}_0 = \boldsymbol{O}, \\ &\boldsymbol{Y}_n = (\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{Y}_{n-1}\boldsymbol{A}_0)(\boldsymbol{Y}_{n-1}\boldsymbol{A}_2))(-\boldsymbol{A}_1)^{-1}, \\ &\boldsymbol{M} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{Y}_n \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.2.5 GI/M 型マルコフ連鎖

ブロック 3 重対角行列を一般化した GI/M 型と呼ばれる構造をもったマルコフ連鎖[4]も行列幾何形式解を持つことが分かっている．ここで，GI/M 型マルコフ連鎖とは次の $\boldsymbol{Q}$ を推移速度行列として持つ 2 次元の CTMC $\{Y(t)\} = \{(L(t), J(t))\}$ を指す．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1' & \boldsymbol{A}_0' & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{A}_2' & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{A}_3' & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\ \boldsymbol{A}_4' & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

GI/M 型マルコフ連鎖についても QBD 過程の場合と全く同様にして，その定常分布 $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_\ell)$ が $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{M}$ を公比行列として

$$\boldsymbol{\pi}_\ell = \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_\ell} = \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_{\ell-1}} \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_{\ell-1}} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\pi}_{\ell-1} \boldsymbol{R},\ \ell \geq 2$$

で与えられる．

2.3 準出生死滅過程の例：M/PH/1 モデル

(1) モデル

ここで解析の対象とする待ち行列モデル M/PH/1 は、図 2.1 に示した単一窓口待ち行列モデルのひとつである．客はパラメータ λ のポアソン過程に従って到着し、窓口では表現 $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\beta})$ をもつ相型分布に従った時間だけサービス

[3]この分野では，行列 $\boldsymbol{M}$ は記号 $\boldsymbol{N}$ で表されることが多い．

[4]GI/M 型という名称は GI/M/s 待ち行列に由来する．

を受け、システムを退去する．窓口の数は 1 つで，ある客が到着したときに窓口が空いていれば直ちにサービスを受けはじめ，窓口がサービス中であればその客は待ち行列の最後尾について自分の順番を待つ．ある客のサービスが終了したときに待ち行列で待っている客がいれば，行列の先頭の客が窓口へ進み，サービスを受け始める．客のサービス時間は，互いに，また到着過程とも独立である．

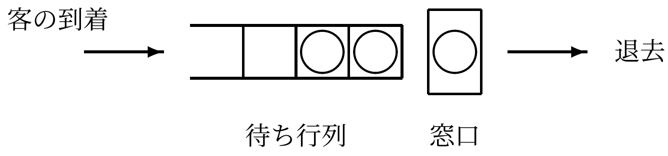

図 2.1: 単一窓口待ち行列モデル

(2) マルコフ連鎖による記述

このモデルでは，時刻 t において系内にいる客の数 $L(t)$ とサービス過程の相番号 $J(t)$ の組 $Y(t) = (L(t),\, J(t))$ をとると，これがマルコフ連鎖となる．$\mathcal{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とし，さらに相型分布 $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\beta})$ を記述するマルコフ連鎖の一時的状態の集合を $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, s\}$ とすれば，このマルコフ連鎖の状態空間は $S = \mathcal{Z}_+ \times \mathcal{J} = \{(n, j) \,|\, n \in \mathcal{Z}_+,\ j \in \mathcal{J}\}$ となる．ただし，$L(t) = 0$ のときには系内に誰も客がいないのでサービスは行われておらず，サービス過程の相番号 $J(t)$ は不要である．しかし，以後の表現を簡単にするために，ここではこの状態空間はそのままにして，システムの状態を次のように定義する[5]．客のサービスは，その客が窓口にきたときに開始する．従って，サービス過程の相は，客が窓口にきた時点で初期確率ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ にしたがって選ばれると考えるのが自然である．しかし，ここでは，ある客のサービスが終了したら，待っている客の有無に関わらず，次の客のサービス開始時の相を先に選んでしまうものとする．もちろん，サービスを受けるべき客がいない場合，サービス過程は客が到着し，サービスが開始されるまで予め決められた相にじっととどまる．こうすると $L(t) = 0$ のときもサービス過程の相 $J(t)$ は定義され，マルコフ性も損なわれない．

このようにマルコフ連鎖 $Y(t) = (L(t),\, J(t))$ を定義すると，その推移速度行列は次のようになる．ただし，$\boldsymbol{e}$ をすべての要素が 1 の列ベクトルとして，$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}$ である．

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda \boldsymbol{I} & \lambda \boldsymbol{I} & O & O & \cdots \\ \boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta} & -\lambda \boldsymbol{I} + \boldsymbol{B} & \lambda \boldsymbol{I} & O & \cdots \\ O & \boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta} & -\lambda \boldsymbol{I} + \boldsymbol{B} & \lambda \boldsymbol{I} & \ddots \\ O & O & \boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta} & -\lambda \boldsymbol{I} + \boldsymbol{B} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

これは $\boldsymbol{Q}$ がブロック 3 重対角行列であることを示しており，$\{Y(t)\}$ は QBD 過程となる．

(3) 定常分布

$\{Y(t)\}$ の定常分布を $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0 \ \ \boldsymbol{\pi}_1 \ \ \boldsymbol{\pi}_2 \ \ \cdots)$ とする．式 (2.22) と $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{B}_0 = \lambda \boldsymbol{I}$ より，公比行列を $\boldsymbol{R} = \lambda \boldsymbol{M}$ として

$$\boldsymbol{\pi}_\ell = \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{R}^\ell = \boldsymbol{\pi}_0 (\lambda \boldsymbol{M})^\ell,\ \ell \geq 0 \tag{2.29}$$

が得られる．また，式 (2.23) の第 1 式より，

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{M} \boldsymbol{b} \boldsymbol{\beta}$$

が得られるが，$\boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{M} \boldsymbol{b}$ がスカラーであることより $\boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{M} \boldsymbol{b} = c$ とおいて，$\boldsymbol{\pi}_0 = c\boldsymbol{\beta}$ となる．$\boldsymbol{M}$ 及び $\boldsymbol{R}$ は次の補題より陽な式で与えられることが分かる．

[5] このことから分かるように，システムの挙動を表すマルコフ連鎖の表現は一意ではない．解析上の扱いやすさを考慮しながらマルコフ連鎖を構成することは時に重要である．

補題 2.5 (M/PH/1 の公比行列)
任意の $\ell \geq 1$ に対して，$\mathcal{L}_\ell$ の状態 (ℓ, i) から出発して，$\mathcal{L}_{\ell-1}$ に到達するまでに状態 (ℓ, j) に滞在した時間の期待値を μ_{ij} とし，$\boldsymbol{M} = (\mu_{ij})$ とする．このとき，$\boldsymbol{M}$ は

$$\boldsymbol{M} = (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta})^{-1} \tag{2.30}$$

で与えられる．また，$\boldsymbol{A}_0 = \lambda \boldsymbol{I}$ をレベルがひとつ上がる場合の推移速度の行列とする．これらを用いて 公比行列は $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{M}$ で与えられる．

(証明) レベル ℓ を任意に固定して考える．$\mathcal{L}_\ell$ を一時的状態の集合，$\mathcal{L}_{\ell-1}$ と $\mathcal{L}_{\ell+1}$ を吸収状態の集合と考える．このとき，補題 2.2 より，$\mathcal{L}_\ell$ から初めて他のレベルに推移するまでに $\mathcal{L}_\ell$ 内の各状態に滞在した時間の期待値は $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}$ で与えられ，初めて他のレベルに推移した時にそれが $\mathcal{L}_{\ell+1}$ の状態である確率（の行列）は $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1} \lambda \boldsymbol{I}$ で与えられる．また，推移速度行列がブロック 3 重対角であることから，$\mathcal{L}_{\ell+1}$ に推移すると，$\mathcal{L}_{\ell-1}$ に到達する前に必ず $\mathcal{L}_\ell$ に戻り，戻った時点における状態の分布は過去の履歴に係わらず $\boldsymbol{\beta}$ である．以上より，$\boldsymbol{M}$ に関して次の関係式が得られる．

$$\boldsymbol{M} = (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1} + (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1} \lambda \boldsymbol{I} \boldsymbol{e} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{M}$$

この関係式より，式 (2.30) が得られる．この式はレベル ℓ に依存しない． □

さらに，正規化条件より次を得る．

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_\ell \boldsymbol{e} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{R}^\ell \boldsymbol{e} = c \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1} \boldsymbol{e} = 1 \tag{2.31}$$

ところで，$\boldsymbol{R}$ の式より，

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1} = \left(\boldsymbol{I} - \lambda(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{B}^{-1}\right) \left(\boldsymbol{I} + \lambda \boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}$$

であるので，これより，

$$c^{-1} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\beta}\left(\boldsymbol{I} + \lambda \boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1} \boldsymbol{e} = \boldsymbol{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda \boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta}(-\boldsymbol{B})^{-1}\right)^n \boldsymbol{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda \boldsymbol{\beta}(-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{e}\right)^n = (1-\rho)^{-1}$$

となる．ここで，$h = \boldsymbol{\beta}(-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{e}$ (平均サービス時間) とおいて，$\rho = \lambda h$ (トラヒック密度) である．以上をまとめると次のようになる．

$$\boldsymbol{\pi}_\ell = (1-\rho)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{R}^\ell,\ \ell \geq 0 \tag{2.32}$$

$$\boldsymbol{R} = \lambda\left(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta}\right)^{-1} \tag{2.33}$$

2.4 補足

ここでは，QBD 過程の例として，待ち行列モデル MAP/PH/c とその説明のために必要となる事項を示す.

2.4.1 クロネッカー演算

(1) クロネッカー演算の定義

相型分布などを用いてモデル構築をする際に，以下に示す行列のクロネッカー演算が非常に有効である．

定義 2.3 (クロネッカー積) $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{kl})$ をそれぞれ $m_A \times n_A, m_B \times n_B$ の行列とする．このとき $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の**クロネッカー積 (Kronecker product)** を，その第 (i,k)-(j,l) 要素が $a_{ij}b_{kl}$ で与えられる $(m_A m_B) \times (n_A n_B)$ 行列とし，$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ と書く．行列の形で表すと次のようになる．

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n_A}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n_A}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m_A 1}\boldsymbol{B} & a_{m_A 2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{m_A n_A}\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

補題 2.6 （クロネッカー積の演算）

クロネッカー積は次の性質を満たす．ただし，ここで $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ は行列で，a, b はスカラーである．また行列のサイズは，両辺の演算がうまく定義できるものであるとする．

$$\begin{aligned}
&(a\boldsymbol{A}) \otimes (b\boldsymbol{B}) = ab\,(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})\\
&(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C})\\
&(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2) \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1 \otimes \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}_2 \otimes \boldsymbol{B}\\
&\boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2) = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}_2\\
&(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) \otimes (\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2) = (\boldsymbol{A}_1 \otimes \boldsymbol{B}_1)\,(\boldsymbol{A}_2 \otimes \boldsymbol{B}_2)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

定義 2.4 （クロネッカー和） 2 つの正方行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の**クロネッカー和 (Kronecker sum)** を $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I}_B + \boldsymbol{I}_A \otimes \boldsymbol{B}$ で定義し， $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$ と書く．ここで $\boldsymbol{I}_A$, $\boldsymbol{I}_B$ はそれぞれ $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ と同じサイズの単位行列である．

(2) 互いに独立なマルコフ連鎖の組

$\{X_1(t)\}$ と $\{X_2(t)\}$ を，それぞれ推移速度行列 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ をもつ互いに独立な有限マルコフ連鎖とする．その状態空間はそれぞれ S_1, S_2 で，初期分布は $\boldsymbol{\pi}_1(0), \boldsymbol{\pi}_2(0)$ で与えられているものとする．このときこれらの組によって定義される確率過程 $\{X(t)\} = \{(\,X_1(t),\ X_2(t)\,)\}$ はやはりマルコフ連鎖となり，その状態空間，初期分布，推移速度行列は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\text{(状態空間)} && S = S_1 \times S_2 \qquad \text{(直積)}\\
&\text{(初期分布)} && \boldsymbol{\pi}(0) = \boldsymbol{\pi}_1(0) \otimes \boldsymbol{\pi}_2(0)\\
&\text{(推移速度行列)} && \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1 \oplus \boldsymbol{Q}_2
\end{aligned} \tag{2.36}$$

なお，これらが離散時間マルコフ連鎖の場合は，推移確率行列がクロネッカー積で与えられる．

2.4.2　相型分布の演算

T_1, T_2 を，それぞれ表現 $(\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{\beta}_1)$ $(\boldsymbol{U}_2, \boldsymbol{\beta}_2)$ をもつ互いに独立な相型分布に従う確率変数とする．このとき，T_1 と T_2 から導かれる様々な確率変数の多くも，また相型分布となる．ここでは表記を簡単にするため，$\boldsymbol{u}_i = -\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{e}$, $i = 1, 2,$ とおく．また $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2$ をそれぞれサイズが $\boldsymbol{U}_1$ および $\boldsymbol{U}_2$ と同じ単位行列とする．

(a) $T_1 + T_2$ の分布

$$\boldsymbol{\beta} = (\,\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{0}\,), \qquad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{\beta}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_2 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

(b) T_1 を確率 p で，T_2 を確率 $1-p$ でとる混合分布

$$\boldsymbol{\beta} = (\,p\boldsymbol{\beta}_1 \quad (1-p)\boldsymbol{\beta}_2\,), \qquad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_2 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

(c) $\min(T_1, T_2)$ の分布

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_2, \qquad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \oplus \boldsymbol{U}_2 \tag{2.39}$$

(d) $\max(T_1, T_2)$ の分布

$$\boldsymbol{\beta} = (\,\boldsymbol{\beta}_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}\,), \qquad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_1 \oplus \boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{I}_1 \otimes \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_1 \otimes \boldsymbol{I}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_2 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

2.4.3　マルコフ型到着過程

ポアソン到着ではその到着率は時間とともに変化せず一定であった．マルコフ型到着過程の直感的なイメージは，この到着率をある有限マルコフ連鎖に従って変化させたものである．もう少し正確には，環境を表す有限マルコフ連鎖 $\{I(t)\}$ を考え，それが状態推移を起こしたときにその状態に依存したある確率で客が到着する，というものである．なおこの場合，同じ状態への推移も許し，それも状態推移の中に含めて考える．

定義 2.5 （マルコフ型到着過程） 計数過程 $\{N(t)\}$ が次の推移速度行列を持つ CTMC で表される時，$\{N(t)\}$ を**マルコフ型到着過程 (Markovian arrival process; MAP)** という．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & & \\ & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

ここで，$\boldsymbol{D}$ は客の到着を伴う推移，$\boldsymbol{C}$ は客の到着を伴わない推移，の推移速度を要素としてもつ行列である．$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ は環境を表す有限マルコフ連鎖 $\{I(t)\}$ の推移速度行列となる．

- ポアソン過程は $\boldsymbol{D}=(\lambda), \boldsymbol{C}=(-\lambda)$ のマルコフ型到着過程と考えることができる．その他に，**断続ポアソン過程 (interrupted Poisson process)**，**交替ポアソン過程** (alternate Poisson process)，**マルコフ変調ポアソン過程** (Markov modulated Poisson process)，**相型再生過程 (PH renewal process)** などもマルコフ型到着過程の特殊ケースと考えることができる (詳しくは文献 [1] を参照).
- マルコフ型到着過程は，到着間隔に相関が含まれる場合も表現できるので，実用上十分広い到着過程のクラスと考えられている．

2.4.4 MAP/PH/c モデル

ここでは，QBD 過程の例として，待ち行列モデル MAP/PH/c を示す． MAP/PH/c は，図 2.2 に示したような各窓口でのサービス分布が異なる複数窓口待ち行列モデルである．客は表現 $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$ をもつマルコフ型到着過程にしたがって到着する．窓口 k では表現 $(\boldsymbol{B}_k,\boldsymbol{\beta}_k)$ をもつ相型分布に従った時間だけサービスを受け，システムを退去する．窓口の数は c で，1 本の待ち行列が形成される．ある客が到着したときにいずれかの窓口が空いていれば直ちにサービスを受けはじめ，すべての窓口がサービス中であればその客は待ち行列の最後尾について自分の順番を待つ．ある客のサービスが終了したときに待ち行列で待っている客がいれば，行列の先頭の客がその空いた窓口へ進み，サービスを受け始める．客の到着間隔やサービス時間は，互いに独立である．

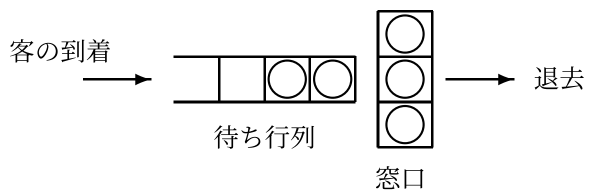

図 2.2: 単一窓口待ち行列モデル

(1) MAP/PH/c モデルのマルコフ連鎖による記述

このモデルでは，時刻 t における系内客数 $N(t)$，到着過程の相番号 $I(t)$，および各窓口におけるサービス過程の相番号 $J_k(t)$, $k=1,2,\ldots,c$, の組 $X(t)=(N(t), I(t), J_1(t), \cdots, J_c(t))$ をとると，これがマルコフ連鎖となる．ただし，$N(t)<c$ のときはサービスをしていない窓口が存在するため，状態空間の表現は少し複雑になる．まず $\mathcal{N}_c=\{c{+}1, c{+}2,\ldots\}$ とし，さらにマルコフ型到着過程 $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$ の状態空間を $\mathcal{I}=\{1,2,\ldots,s_0\}$，相型分布 $(\boldsymbol{B}_k,\boldsymbol{\beta}_k)$ を記述するマルコフ連鎖の一時的状態の集合を $\mathcal{J}_k=\{1,2,\ldots,s_k\}$，この $\mathcal{J}_k$ に窓口が空いていることを表す状態 0 を加えた集合を $\mathcal{J}'_k=\{0\}\cup\mathcal{J}_k$ とすれば，このマルコフ連鎖の状態空間は $\mathcal{S}=(\mathcal{I}\times\mathcal{J}'_1\times\cdots\times\mathcal{J}'_c)\cup(\mathcal{N}_c\times\mathcal{I}\times\mathcal{J}_1\times\cdots\times\mathcal{J}_c)$ となる．

(2) 推移速度行列

MAP/PH/c のマルコフ連鎖による表現では，到着過程を表すマルコフ連鎖 $\{I(t)\}$ やサービス過程を表すマルコフ連鎖 $\{J_k(t)\}$ の互いに独立な組を考えた．このような独立なマルコフ連鎖の組に対応する推移速度行列はクロネッカー演算を用いると容易に表すことができる (クロネッカー演算については補足 2.4.1 を参照のこと)．MAP/PH/c のマルコフ連鎖の推移速度行列を具体的に書こうとすると，$N(t)\le c$ に相当するところがかなり複雑になる．客が到着したときに，空いているどの窓口を利用するか，という部分が難しいのである．何らかの計算を具体的に行うときには，ここはアルゴリズム的に書いてしまえばそれ程難しくはないが，数式の形ではうまく記述できない．そこで，ここではこの部分を $\boldsymbol{A}'_0$, $\boldsymbol{A}'_1$, $\boldsymbol{A}'_2$ とまとめた形で書いておくことにする．

M/PH/1 モデルのときと同様，$\boldsymbol{e}$ はすべての要素が 1 の列ベクトル，$\boldsymbol{b}_k=-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{e}$ である．

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix}
\boldsymbol{A}'_1 & \boldsymbol{A}'_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\
\boldsymbol{A}'_2 & \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{B}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{B}_c & \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{I} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \cdots \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \otimes (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{\beta}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\beta}_c) & \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{B}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{B}_c & \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{I} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{I} & \ddots \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \otimes (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{\beta}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\beta}_c) & \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{B}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{B}_c & \ddots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix} \tag{2.41}
$$

これは要素の小行列は複雑になっているが，M/PH/1 のときと同様，ブロック 3 重対角行列になっている．

3 ジャクソンネットワークに関連して

3.1 連続時間マルコフ連鎖の逆過程

定義 3.1 （逆過程） 確率過程 $\{X(t)\}$ に対し，ある t_0 を用いて，$\tilde{X}(t) = X(t_0 - t)$ で与えられる過程 $\{\tilde{X}(t)\}$ を $\{X(t)\}$ の逆過程という．

以下，対象とする CTMC は全て，正の滞在時間を持ち，正則であるとする．

補題 3.1 （CTMC の逆過程）
推移速度行列 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$，定常分布 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$ を持つ既約で定常な CTMC $\{X(t)\}$ の逆過程は，$\tilde{\boldsymbol{Q}} = (\tilde{q}_{ij})$，

$$
\tilde{q}_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} q_{ji}, \tag{3.42}
$$

を推移速度行列，$\boldsymbol{\pi}$ を定常分布とする定常な CTMC となる．

（証明） 省略（確認せよ） □

もとの過程と逆過程の確率法則が同一となる定常過程を**可逆**であるという．次は，CTMC が可逆となる必要十分条件である．

補題 3.2 （可逆性）
推移速度行列 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$，定常分布 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$ を持つ既約で定常な CTMC $\{X(t)\}$ が可逆であるための必要十分条件は次で与えられる．

$$
\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}, \; i, j \in S \tag{3.43}
$$

（証明） 省略（確認せよ） □

- 式 (3.43) は詳細平衡方程式 (detailed balance equation) と呼ばれ，可逆なマルコフ連鎖を扱う場合には必ず現れる重要な式である．

正の滞在時間を持ち，正則で既約な CTMC では，平衡方程式 $\boldsymbol{xQ} = \boldsymbol{0}^\top$（これを大域平衡方程式, global balance equation, ともいう）を満たす分布ベクトル $\boldsymbol{x}$ が得られればそれが定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ となる．よって，ある分布ベクトル $\boldsymbol{x}$ が定常分布であるかどうかを調べるには，平衡方程式 $\boldsymbol{xQ} = \boldsymbol{0}^\top$ を満たすかどうかをチェックすればよい．このチェックを効率的に行うための方法を示したのが次の補題である．

補題 3.3 （定常分布であることの検査法）
$\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ を状態空間 S 上の安定的で保存的な推移速度行列，$\boldsymbol{x} = (x_i) > \boldsymbol{0}^\top$ を状態空間 S 上の確率ベクトルとする．このとき，$\boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{x}$ が次を満たせば，$\boldsymbol{x}$ は平衡方程式を満し，$\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ の定常分布となる．

(i) $\forall i, j \in S \, (j \neq i)$, $\tilde{q}_{ij} = \dfrac{x_j}{x_i} q_{ji}$ と定義すると，

(ii) $\forall i \in S$, $\displaystyle\sum_{j \in S, \, j \neq i} \tilde{q}_{ij} = \sum_{j \in S, \, j \neq i} q_{ij}$ を満たす.

（証明） $\sum_{j \in S, \, j \neq i} x_j q_{ji} = \sum_{j \in S, \, j \neq i} x_i \tilde{q}_{ij} = x_i q_i$ より，$\boldsymbol{xQ} = \boldsymbol{0}^\top$ を満たすことが分かる． □

- この補題より，与えられた推移速度行列 $\boldsymbol{Q}$ の定常分布を（もし存在すれば）以下のようにして発見的に求める方法が得られる．
  (a) 定常分布を予想し，それを $\boldsymbol{x} = (x_i)$ とする．

(b) (i) を用いて逆過程の推移速度（の候補） $\tilde{q}_{ij}$ を構成する．

(c) それが (ii) の条件を満しているかをチェックする．満たせば $\boldsymbol{x}$ は定常分布である．

- (i) で任意の $i, j \in S$ に対して $\tilde{q}_{ij} = q_{ij}$，すなわち， $x_i q_{ij} = x_j q_{ji}$ であれば，$\boldsymbol{x}$ は定常分布であり，CTMC は可逆であることが直ちに得られる．
- この補題から分かるように，定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ が与えられていれば，(i) で構成した逆過程の推移速度は (ii) の条件を常に満たす．

3.2 ジャクソンネットワークとその定常分布

コンピュータや通信ネットワークは，ジョブやパケットがあちらこちらで衝突し，そのためたくさんの待ち行列ができる複雑なネットワークシステムである．また，生産組み立てラインも，工程と工程の間にあるバッファーで待ち行列ができるので，待ち行列が直列型あるいはツリー型につながったシステムとみなすことができる．このような待ちを伴う複雑なシステムの性能や特性をモデル上で評価するために，**待ち行列ネットワーク (queueing network)** というモデルが提案され，研究されている．待ち行列ネットワークは，待ち行列がネットワーク状につながったモデルであるが，その複雑さのため，どのようなものでも解析できるというわけにはいかない．ここではジャクソンネットワークと呼ばれる，積形式解を持つ最も基本的なモデルについて解説する．

3.2.1 開放型ネットワークと閉鎖型ネットワーク

待ち行列ネットワークは，客がネットワークの外から入ったり外へ出たりするかどうかによって，開放型ネットワークと閉鎖型ネットワーク，およびそれらの混合型に大別することができる．

- **開放型待ち行列ネットワーク (open queueing network)** ：客は外から入ってきて，あちこちのノード (個別の待ち行列) を訪問してサービスを受け，いずれネットワークの外へ出ていってしまう，というモデルである．典型的な開放型ネットワークとして，生産システムの性能評価に欠かせない **直列型待ち行列システム (tandem queueing network)** がある．
- **閉鎖型待ち行列ネットワーク (closed queueing network)** ：客はネットワークの外から入ってきたり外へ出たりはせず，常に一定の数の客がネットワークの中を動き回る．計算機システムの代表的なモデルであるセントラルサーバモデルは，典型的な閉鎖型ネットワークである．

3.2.2 ジャクソンネットワークの定義と定式化

ジャクソンネットワークとは，簡単に言えば M/M/1 待ち行列がつながった待ち行列ネットワークであり，次のように定義される．

定義 3.2 （ジャクソンネットワーク; Jackson network） ノード数を N とするジャクソン型ネットワークは次で与えられる．

(i) ネットワーク外部からの客は到着率（強度） λ のポアソン過程に従って発生し，確率 r_{0j} でノード j へ到着する $(j = 1, 2, ..., N)$．ここで，$\sum_{j=1}^{N} r_{0j} = 1$ である．外部からノード j への到着率を $\lambda_j = \lambda r_{0j}$ とする．

(ii) 各ノードのサーバ数を 1，待ち室の容量を無限，サービス規律を FIFO とする．ノード j $(j \in \{1, 2, ..., N\})$ でのサービス時間は平均 $1/\mu_j$ の指数分布に従う．

(iii) ノード i $(i \in \{1, 2, ..., N\})$ でのサービスを終了した客は確率 r_{ij} でノード j $(j \in \{1, 2, ..., N\})$ へ移動するか，確率 $r_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{N} r_{ij}$ で外部へ退去する．

(iv) (i) から (iii) で与えられた確率的事象は互いに独立であるとする．

- (iii) のように，移動先の選択確率がその時にサービスを受けていたノード番号にのみ依存するルーチングをマルコフ型ルーチングともいう．
- $\lambda = 0$, $r_{i0} = 0$, $i = 1, 2, ..., N$, でネットワーク内に常に一定人数の客がいるモデルは，外部との客の出入りのないモデルであり，閉鎖型ジャクソンネットワークとなる．$\lambda > 0$ でネットワーク内の客はどの客もいつかは外部へ退去するモデルが開放型ジャクソンネットワークとなる．
- ここで示したモデルは最も基本的なジャクソンネットワークである．これを次のように拡張したモデルもジャクソンネットワークと呼ばれる．この拡張されたモデルも積形式解を持つ．

– (i) において外部からの到着率をネットワーク内の客の総数 x の関数 $\lambda(x)$ として与える．

– (ii) においてノード i ($i \in \{1,2,...,N\}$) のサービス率をそのノード内にいる客数 x_i の関数 $\mu_i(x_i)$ として与える (これにより複数サーバーも表現できる)．

CTMC としてのモデル化

$j \in \{1,2,...,N\}$ に対して $X_j(t)$ を時点 t におけるノード j での系内客数とし，$\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), ..., X_N(t))$ とする．その定義からもわかるように，$\{\boldsymbol{X}(t)\}$ は状態空間を $S = \mathcal{Z}_+^N$ とする CTMC となる．以下では，j 番目の要素が 1 でその他は全て 0 である N 次元ベクトル（N 次元単位ベクトル）を $\boldsymbol{e}_j$ とする．$\{\boldsymbol{X}(t)\}$ の推移速度行列を形式的に $\boldsymbol{Q} = (q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in S)$ とおくと，$\boldsymbol{Q}$ の各要素は次で与えられる．

$$q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \lambda r_{0i} & \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i,\ i = 1,2,...,N \quad \text{（外部到着）} \\ \mu_i r_{i0} & x_i > 0,\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i,\ i = 1,2,...,N \quad \text{（外部退去）} \\ \mu_i r_{ij} & x_i > 0,\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j,\ i,j = 1,2,...,N,\ j \neq i \quad \text{（移動）} \\ -\left(\lambda + \sum_{i=1}^N \mu_i (1 - r_{ii}) 1_{\{x_i > 0\}}\right) & \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \quad \text{（対角要素）} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.44}$$

この $\boldsymbol{Q}$ は安定的かつ保存的であり，一様化条件を満たす．$\{\boldsymbol{X}(t)\}$ の定常分布ベクトルを（存在すれば）形式的に $\boldsymbol{\pi} = (\pi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in S)$ とおく．(注：ノード i からノード i へ移動した場合，$\{\boldsymbol{X}(t)\}$ の状態は変化しない.)

3.2.3 定常分布の積形式解

(1) 開放型ジャクソンネットワーク

開放型ネットワークなので，外部から到着した客はネットワーク内のノードを巡り，いつかは外部へと退去する．そこで，外部から到着した一人の客が，外部へ退去するまでにノード j を訪れる平均回数 θ_j ($i \in \{1,2,..,N\}$) を求めてみる．客がどういうルートで各ノードを訪問していくかは，ルーチング確率 r_{ij} にのみ依存し，サービス時間とは無関係である．よって，$\theta_j,\ j = 1,2,\ldots,N,$ は次の**トラヒック方程式 (traffic equation)**

$$\theta_j = r_{0j} + \sum_{i=1}^{N} \theta_i r_{ij},\ j = 1,2,...,N \tag{3.45}$$

の解として与えれる．この式の右辺第一項は外部から直接ノード j に入る場合の平均回数，右辺第二項はノード i から移動してノード j に入る場合の平均回数である．この θ_j は，推移確率行列

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1N} & r_{10} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{N1} & \cdots & r_{NN} & r_{N0} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

と初期分布 $(r_{01} \ \cdots \ r_{0N} \ 0) = (\boldsymbol{\beta} \ 0)$ をもつ吸収的マルコフ連鎖において，吸収されるまでに状態 j を訪問する平均回数とみることもできる (3.3 参照)．もちろん，外部が吸収状態となる．すなわち，$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \ \cdots \ \theta_N)$ として，

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U})^{-1}$$

で与えられる．これが方程式系 (3.45)（行列表現は $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{U}$）の解であることは明らかである．逆に (r_{ij}) が吸収的マルコフ連鎖の条件 (どの状態から出発しても，確率 1 でいずれは吸収状態に吸収される) を満たしていれば，方程式系 (3.45) は，ただ一組の解をもつことも分かる．

定理 3.1 （開放型ジャクソンネットワークの積形式解 ）
$\alpha_j = \lambda\theta_j,\ \rho_j = \alpha_j/\mu_j,\ j = 1,2,...,N,$ とする．$\rho_j < 1,\ j = 1,2,...,N,$ であれば定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ は次で与えられる．

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{N} f_j(x_j) = \prod_{j=1}^{N} (1 - \rho_j)\rho_j^{x_j},\ \boldsymbol{x} \in S \tag{3.47}$$

（証明） 平衡方程式 $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}^\top$ を満たすことを直接調べてもよいが，ここでは定常分布であることの検査法を用いる．

(a) 式 (3.47) で与えられる $\boldsymbol{\pi}$ は，非負であり，$\rho_j < 1,\ j = 1,2,...,N,$ から $\sum_{\boldsymbol{x} \in S} \pi(\boldsymbol{x}) = 1$ を満たすので確率ベクトルである．

(b) $\tilde{q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\pi(\boldsymbol{y})}{\pi(\boldsymbol{x})} q(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ を構成する．ここで，$q(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ がゼロではないのは $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$) が外部到着，外部退去，移動の関係を満たす時のみである．

- $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i$ の時（逆過程では外部到着，順過程では外部退去）

$$\tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i) = \frac{\pi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i)}{\pi(\boldsymbol{x})} q(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}) = \frac{f_i(x_i + 1)}{f_i(x_i)} \mu_i r_{i0} = \lambda \theta_i r_{i0}$$

- $x_i > 0$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i$ の時（逆過程では外部退去，順過程では外部到着）

$$\tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i) = \frac{\pi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i)}{\pi(\boldsymbol{x})} q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}) = \frac{f_i(x_i - 1)}{f_i(x_i)} \lambda r_{0i} = \frac{\mu_i}{\theta_i} r_{0i}$$

- $x_i > 0$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$, $j \neq i$ の時（逆過程ではノード i から j への移動，順過程では j から i への移動）

$$\tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) = \frac{\pi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j)}{\pi(\boldsymbol{x})} q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{x}) = \frac{f_i(x_i - 1) f_j(x_j + 1)}{f_i(x_i) f_j(x_j)} \mu_j r_{ji} = \frac{\mu_i}{\theta_i} \theta_j r_{ji}$$

(c) $\sum_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} \tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ をチェックする (2 本目の等式の導出にトラヒック方程式を利用).

$$\sum_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \lambda r_{0i} + 1_{\{x_i > 0\}} \mu_i \left(r_{i0} + \sum_{j \neq i} r_{ij} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\lambda r_{0i} + 1_{\{x_i > 0\}} (1 - r_{ii}) \mu_i \right)$$

$$\sum_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} \tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \lambda \theta_i r_{i0} + 1_{\{x_i > 0\}} \frac{\mu_i}{\theta_i} \left(r_{0i} + \sum_{j \neq i} \theta_j r_{ji} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\lambda \theta_i r_{i0} + 1_{\{x_i > 0\}} (1 - r_{ii}) \mu_i \right)$$

ここで，トラヒック方程式を用いて

$$\sum_{i=1}^{N} \theta_i r_{i0} = \sum_{i=1}^{N} \theta_i \left(1 - \sum_{j=1}^{N} r_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i - \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \theta_i r_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \theta_i - \sum_{j=1}^{N} (\theta_j - r_{0j}) = \sum_{j=1}^{N} r_{0j}$$

なので $\sum_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} \tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となり，$\boldsymbol{\pi}$ は定常分布であることが示される． □

- このように，平衡状態における状態確率が各ノードの系内人数に依存した項の積の形で書けるものを**積形式解 (product form solution)** という．
- その定義より，α_j はノード j への総到着率である．よって，この開放型ジャクソンネットワークでは，各ノードがあたかも互いに独立な，到着率 α_j，サービス率 μ_j の M/M/1 待ち行列モデルであるかのような形で定常確率が与えられている．このことから，特定のひとつのノードの振る舞いを分析するときには，そのノードのことだけを考えて解析をすればよい．ただし，各ノードが独立であるといっても，これは平衡状態における同時分布のことだけで，一般に，ノード内客数の変化などの時間的な振る舞いは互いに独立にはならない．

(2) 閉鎖型ジャクソンネットワーク

閉鎖型ネットワークなので，外部との客の出入りはなく，ネットワーク内には常に一定の数の客（K 人とする）がいる．よって，$\{\boldsymbol{X}(t)\}$ が取り得る状態の集合は，S の部分空間

$$\tilde{S} = \{\boldsymbol{x} \in S \,:\, x_1 + x_2 + ... + x_n = K\}$$

となる．閉鎖型ジャクソンネットワークのトラヒック方程式は次で与える．

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{N} \theta_i \, r_{ij}, \; j = 1, 2, ..., N \tag{3.48}$$

これは $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \ \cdots \ \theta_N)$, $\boldsymbol{P} = (r_{ij})$ とすると，$\boldsymbol{\theta P} = \boldsymbol{\theta}$ を表しており，$\boldsymbol{P}$ が確率行列（閉鎖型なので各 i について $\sum_{j=1}^{N} r_{ij} = 1$）であることから，$\boldsymbol{\theta}$ は $\boldsymbol{P}$ の不変測度となる (よって，$\boldsymbol{P}$ が既約であれば，θ_j はあるノードから出発してそのノードに初めて戻るまでにノード j を訪れた平均回数と解釈することができる)．$\boldsymbol{P} = (r_{ij})$ が不変測度の存在する条件を満たしていれば，方程式系 (3.48) は，定数倍を除いてただ一組の解を持つ．

定理 3.2 （閉鎖型ジャクソンネットワークの積形式解 ）

正規化定数を G として，定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ は次で与えられる．

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{G} \prod_{j=1}^{N} f_j(x_j) = \frac{1}{G} \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{\theta_j}{\mu_j} \right)^{x_j}, \; \boldsymbol{x} \in \tilde{S} \tag{3.49}$$

（証明） 各自確かめてみよ． □

- $\boldsymbol{\theta}$ は定数倍の自由度があるので，例えば，$\theta_1 = 1$ としてトラヒック方程式の解を求めてもよい．
- 閉鎖型ジャクソンネットワークは有限マルコフ連鎖となるので，常に定常分布が存在する．既約であればそれは一意である．

- 閉鎖型ネットワークの場合，$\pi(\boldsymbol{x}) > 0$ となるのは $\sum_{j=1}^{N} x_j = K$ のときだけなので，各ノードは確率的に互いに従属し，独立でなくなる．そのため正規化定数 G を求めること，さらには各ノードでの平均客数やスループットといったネットワークの特性量を求めることは，簡単にはいかない．そこで，たたみこみ法 (Convolution Method) や平均値解析法 (Mean Value Analysis) といった閉鎖型ネットワーク用の解析手法が研究されている．これらの手法は実用的であるとともに理論的にも興味のある内容を含んでいる．興味のある人は文献 [4] を参照のこと．

客にクラスを導入し，クラス毎に異なるルーチング確率，異なるサービス時間分布を設定できるある種の待ち行列ネットワークも定常分布の積形式解を持つことが知られている．そのひとつが対称型待ち行列から構成されたネットワーク [9] である．もうひとつの結果としては BCMP 型待ち行列ネットワークがある [5]．モデルの表現範囲としては後者は前者に含まれるが，前者はモデルの定式化において通常の待ち行列モデルとは異なる方法，ポジションを含む定式化をとっている．

3.3 補足：離散時間の吸収的マルコフ連鎖 (状態数が有限の場合)

ここではトラヒック方程式の意味を理解するのに必要な事項として，吸収状態を持つ有限状態の離散時間マルコフ連鎖の性質を示す.

(1) 吸収的マルコフ連鎖

定義 3.3 （吸収的マルコフ連鎖） 既約な集合がすべて一つの状態だけからなっているマルコフ連鎖を吸収的マルコフ連鎖という.

吸収的マルコフ連鎖の推移確率行列は，状態を適当に並べ替えることにより，

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} T & A \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ A \end{array} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.50}$$

という形になる．ここで T は一時的状態の集合，A は吸収状態の集合である．そのため，n ステップ推移確率行列は

$$\boldsymbol{P}^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^n & \boldsymbol{B}_n \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}_n = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U} + \cdots + \boldsymbol{U}^{n-1})\boldsymbol{R} \tag{3.51}$$

となる．吸収的マルコフ連鎖では，いずれかの吸収状態に到達する (吸収される) までの，連鎖の挙動を分析する．

(2) 吸収時間

初期分布が $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{0})$ という形をしていたとすると，k ステップ目でいずれかの吸収状態に吸収される確率は，吸収時点を表す確率変数を T として，

$$f_T(k) = P(T = k) = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{U}^{k-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} \tag{3.52}$$

で与えられる．よって，T の確率母関数は

$$G_T(z) = \mathrm{E}[z] = \sum_{k=1}^{\infty} z^k f_T(k) = z\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} \tag{3.53}$$

となる．これより T の期待値，つまり**平均吸収時間** (mean absorption time) は次のようになる．

$$\mathrm{E}[T] = G'_T(z)|_{z=1} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U})^{-2}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U})^{-2}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{e} \tag{3.54}$$

(3) 吸収確率

式 (3.54) にでてくる $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U})^{-1}$ という行列は，吸収的マルコフ連鎖における重要な特性量で **基本行列** (fundamental matrix) と呼ばれている．一時的状態 i から出発していつかは吸収状態 j に吸収される確率 b_{ij} (**吸収確率**; absorbing probability) を要素とする行列 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ は，これを用いて

$$\boldsymbol{B} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{B}_n = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{R} \tag{3.55}$$

で与えられる.

(4) 訪問回数

基本行列 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U})^{-1}$ 自身の要素 m_{ij} は，次のような意味で **平均訪問回数** (mean number of visits) と解釈することができる．i,j を一時的状態とし，いずれかの吸収状態に吸収されるまでに状態 j を訪問する回数を M_j とする．すなわち，

$$M_j = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}}. \tag{3.56}$$

ここで，

$$\mathrm{E}[1_{\{X_n=j\}} \,|\, X_0=i] = P(X_n=j \,|\, X_0=i) = p_{ij}^{(n)} \tag{3.57}$$

であるので，

$$m_{ij} = \mathrm{E}[M_j \,|\, X_0=i] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}[1_{\{X_n=j\}} \,|\, X_0=i] = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \tag{3.58}$$

であることがわかる．$p_{ij}^{(n)}$ は n ステップ推移確率行列 $\boldsymbol{P}^n$ の i,j 要素であり，式 (3.51) からこれは $\boldsymbol{U}^n$ の i,j 要素であるので，式 (3.58) を行列の形で書けば

$$\boldsymbol{M} = (m_{ij}) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}^2 + \cdots = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U})^{-1} \tag{3.59}$$

となり，平均訪問回数 m_{ij} を要素とする行列が基本行列となることが分かる．

参考文献

[1] 牧本直樹, 待ち行列アルゴリズム, 朝倉書店 (2001).

[2] G. Latouche and V. Ramaswami, *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*, SIAM (1999).

[3] 紀一誠, 待ち行列ネットワーク, 朝倉書店 (2002).

[4] 高橋, 森村, 混雑と待ち, 朝倉書店 (2001).

[5] F. Baskett, K.M. Chandy, R.R. Muntz and F. Palacios-Gomez, Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers, *J. Aooc. Comput. Mach.*, **22** (1975), 248–260.

[6] X. Chao, M. Miyazawa and M. Pinedo, *Queueing Networks, Customers, Signals and Product Form Solutions*, Wiley, New York (1999).

[7] H. Chen and D. D, Yao, *Fundamentals of Queueing Networks*, Springer, New York (2001).

[8] J. R. Jackson, Networks of waiting lines, *Opns. Res.*, **5** (1957), 518–521.

[9] F. P. Kelly, *Reversibility and Stochastic Networks*, John Wiley & Sons, New York (1979).